第一讲　代数式及其运算

第 1 课时　绝对值和乘法公式

知识点回顾

1.绝对值：

绝对值的代数意义：正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值仍是零．即

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

绝对值的几何意义：一个数的绝对值，是数轴上表示这个数的点到原点的距离．

两个数的差的绝对值的几何意义：$|a-b|$表示在数轴上，数 a 和数 b 对应的点之间的距离．

两个绝对值不等式：$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$；

$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a或x>a$

2. 乘法公式：

我们在初中已经学习过了下列一些乘法公式：

（1）平方差公式　　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

（2）完全平方公式　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$．

我们还可以通过证明得到下列一些乘法公式：

（1）立方和公式　　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$；

（2）立方差公式　　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$；

（3）三数和平方公式　　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$；

（4）两数和立方公式　　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

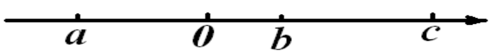
（5）两数差立方公式　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$．

课前练习

1.已知$|x|=5$，则 x=____________；若$|1-c|=2$，则 c=____________

2. 若$(a-1)^2+|b+2|=0$，则 $a+b$=_________．

3.已知 a,b,c 代表的数在数轴上的位置如图示，化简$|a+b+c|+|a-b-c|+|c-b-a|$



4.若 $x^2+\frac{1}{2}mx+k$ 是一个完全平方式，则 k 等于（　　　）

A．m^2　　B．$\frac{1}{4}m^2$　　C．$\frac{1}{3}m^2$　　D．$\frac{1}{16}m^2$

5.若 $a-b=1$，$ab=2$，则$(a+1)(b-1)=$____________

6.已知 $x+y=7$，$xy=12$，则$(x-y)^2=$____________。

典型例题

例 1：解方程：$|x-2|=2x+1$

解：当$x\geq 2$时，原方程可化为$x-2=2x+1$，所以$x=-3$，不符合题意，舍去。

当$x<2$时，原方程可化为$-(x-2)=2x+1$，所以$x=\frac{1}{3}$

例 2：解不等式$|x|<1$

解：$|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$，所以原不等式的解为$-1<x<1$.

例 3：　计算：$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

解法 1：原式$=(x^2-1)\left[(x^2+1)^2-x^2\right]=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1$.

解法 2：原式$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$.

例 4：已知$x+\frac{1}{x}=4$，求下列各式的值：(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$; (2) $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

解：（1）原式$=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

（2）原式$=\dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}}=\dfrac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{14+1}=\dfrac{1}{15}$

随堂练习

1. 当 $a<3$ 时，$|a-3|-(3-a)$的值为（　　）

　A．$6-2a$　　B．0　　C．$2a-6$　　D．$-2a$

2.解不等式：$|5x|\geq 3$

3.已知 $x+y=-5$，$xy=6$，则 x^2+y^2 的值为（　　）

A．1　　B．13　　C．17　　D．25

课后练习

1．填空：如果 $|a|+|b|=5$，且 $a=-1$，则 $b=$________

2．选择题：

下列叙述正确的是（　　）

A．若 $|a|=|b|$，则 $a=b$　　B．若 $|a|>|b|$，则 $a>b$

C．若 $a<b$，则 $|a|<|b|$　　D．若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$

3．已知 $x>5$，求方程的实数根：$|x-5|-|2x-13|=0$。

4.填空：

（1）$\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2=(\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a)$（______________）；

（2）$(4m+$________$)^2=16m^2+4m+($ ________ $)$；

(3) $(a+2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+($ ________________ $)$.

5．选择题：不论 a，b 为何实数，$a^2+b^2-2a-4b+8$ 的值（　　）

A．总是正数　　B．总是负数

C．可以是零　　D．可以是正数也可以是负数

6.已知 $x+y=3$，$xy=2$，则 $x^3+y^3=$_________

第 2 课时　二次根式和分式

知识点回顾

1. 平方根、立方根

平方根：如果一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个数 x 就叫做 a 的平方根，记为 $\pm\sqrt{a}$，其中正的平方根 $\sqrt{a}$ 叫做 a 的算术平方根。一个正数的平方根有两个，且它们互为相反数，0 的平方根是它本身，负数没有平方根。

立方根：如果一个数 x 的立方等于 a，即 $x^3=a$，那么这个数 x 就叫做 a 的立方根，任意一个数都有立方根，正数立方根是正值，负数的立方根是负值，0 的立方根是本身。

2. 二次根式：

一般地，形如 $\sqrt{a}(a\ge 0)$ 的代数式叫做**二次根式**．根号下含有字母、且不能够开得尽方的式子称为无理式．例如 $3a+\sqrt{a^2+b}+2b$，$\sqrt{a^2+b^2}$ 等是无理式，而 $\sqrt{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$，$x^2+\sqrt{2}xy+y^2$，$\sqrt{a^2}$ 等是有理式．

3. 分母（子）有理化

把分母（子）中的根号化去，叫做**分母（子）有理化**．为了进行分母（子）有理化，需要引入有理化因式的概念．两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个代数式互为有理化因式，例如 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}-\sqrt{6}$。

分母有理化的方法是分母和分子都乘以分母的有理化因式，化去分母中的根号的过程；而分子有理化则是分母和分子都乘以分子的有理化因式，化去分子中的根号的过程

在二次根式的化简与运算过程中，二次根式的乘法可参照多项式乘法进行，运算中要运用公式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\ge 0,b\ge 0)$；而对于二次根式的除法，通常先写成分式的形式，然后通过分母有理化进行运算；二次根式的加减法与多项式的加减法类似，应在化简的基础上去括号与合并同类二次根式．

二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的意义：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & a\ge 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

课前练习

1. $\sqrt{(-3)^2}=$_________

2. 下列计算正确的是　　　　（　　）

A. $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{3}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=1$

C. $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=1$　　　D. $\dfrac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

3.下列计算正确的是（　　）

A. $8\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=16\sqrt{3}$　　　B. $\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$

C. $5\sqrt{3}\times 5\sqrt{2}=25\sqrt{6}$　　　D. $4\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{5}$

典型例题

例 1：将下列式子化为最简二次根式：

（1）$\sqrt{12b}$；　（2）$\sqrt{a^2b}(a\ge 0)$；　（3）$\sqrt{4x^6y}(x<0)$.

解：（1）$\sqrt{12b}=2\sqrt{3b}$；

（2）$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=a\sqrt{b}(a\ge 0)$；

（3）$\sqrt{4x^6y}=2|x^3|\sqrt{y}=-2x^3\sqrt{y}(x<0)$.

例 2：计算

（1）$\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}$　　（2）$\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(2-x)^2}\quad(x\ge 1)$

解：（1）原式 $=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4-3}=3(2-\sqrt{3})=6-3\sqrt{3}$

（2）原式$=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}(x-1)+(x-2)=2x-3 & (x>2)\\ (x-1)-(x-2)=1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

例 3 ：化简：$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2004}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2005}$.

解：$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2004}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2005}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2004}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2004}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]^{2004}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1^{2004}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

例 4：　设 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2},y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$，求代数式 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ 的值

解：$\because x+y=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=\dfrac{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=-2\sqrt{3}$

$$xy=\frac{1}{\sqrt{3}-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+2}=-1$$

所以：

$$\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\frac{\sqrt{3}+2}{-1}=-(\sqrt{3}+2)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{(\sqrt{3}-2)}(\sqrt{3}+2)=\frac{(\sqrt{3}+2)^2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=-(\sqrt{3}+2)^2=-(7+4\sqrt{3})$$

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=\frac{(x+y)^2-xy}{x+y}=\frac{(-2\sqrt{3})^2+1}{-2\sqrt{3}}=-\frac{13\sqrt{3}}{6}$$

随堂练习

1.函数 $y=\sqrt{2-x}+\frac{1}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是（　　）

A．$x\leqslant 2$　　B．$x=3$　　C．$x<2$ 且 $x\neq 3$　　D．$x\leqslant 2$ 且 $x\neq 3$

2.已知 $y=\sqrt{2x-5}+\sqrt{5-2x}-3$，则 $2xy$ 的值为（　　）

A．-15　　B．15　　C．$-\frac{15}{2}$　　D．$\frac{15}{2}$

3. 比较大小：$\sqrt{12}-\sqrt{11}$ ____ $\sqrt{11}-\sqrt{10}$（填“>”，或“<”）.

课后练习

1．填空：

（1）$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=$ ____________；

（2）若 $\sqrt{(5-x)(x-3)^2}=(x-3)\sqrt{5-x}$，则 x 的取值范围是____________；

（3）$4\sqrt{24}-6\sqrt{54}+3\sqrt{96}-2\sqrt{150}=$ ____________；

2．选择题：

（1）等式 $\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的条件是（　　）

A．$x\neq 2$　　B．$x>0$　　C．$x>2$　　D．$0<x<2$

（2）若 $\frac{2x-y}{x+y}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{x}{y}=$（　　）

A．1　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

3．比较大小：$2-\sqrt{3}$________$\sqrt{5}-\sqrt{4}$（填“>”，或“<”）．

4．若$b=\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$，求$a+b$的值．

5. 化简：$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}(0<x<1)$.

6．计算$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{99\times100}$.

第二讲　因式分解

知识点回顾

因式分解是中学数学中最重要的恒等变形之一，初中数学教材中主要介绍了提取公因式法、运用公式．而在高中学习过程中还需用到待定系数法，十字相乘法等。

1．多项式因式分解的方法

（1）提公因式法 ： $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

（2）运用公式法

①平方差公式：. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

②完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

③立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

④立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

（3）分组分解法

（4）十字相乘法

① $x^2+(p+q)x+pq$ 型的式子的因式分解

这类二次三项式的特点是：二次项的系数是 1；常数项是两个数的积；一次项系数是常数项的两个因数的和．因此，可以直接将某些二次项的系数是 1 的二次三项式因式分解：

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$$

② kx^2+mx+n 型的式子的因式分解

如果能够分解成 k＝ac，n＝bd，且有 ad＋bc＝m 时，即：

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b \\ c & & d \\ \hline bc & + & ad \end{array}$$

那么：$kx^2+mx+n=(ax+b)(cx+d)$

课前练习

分解因式：

（1）$(m+n)(x-y)+(m-n)(y-x)$　　（2）$4x^2-12xy+9y^2$

（3）　x^2-6x+8　　　　（4）a^3+1　　　　（5）$x^2+ax-(a+1)$

典型例题

例 1：分解因式：　$x(x-1)-y(y-1)$

解：　原式= x^2-x-y^2+y　$=(x^2-y^2)-(x-y)=(x+y)(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(x+y-1)$

例 2：分解因式：$3x^2-11x+10$

分析：

$$\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 3 & -5 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{(-6)+(-5)=-11} \end{array}$$

解：$3x^2-11x+10=(x-2)(3x-5)$

随堂练习

分解因式：（1）$2x^2-5x+2$　　　（2）$x^2+2ax+2a-1$　　　（3）x^3-9x+8

课后练习

一、选择题

1. 下列多项式能分解因式的是（　　　）

A. a^2-b；　　B. a^2+1；　　C. a^2+ab+b^2；　　D. a^2-4a+4；

2. 多项式 $2x^2-xy-15y^2$ 的一个因式（　　　）

A. $2x-5y$　　B. $x-3y$　　C. $x+3y$　　D. $x-5y$

3. 下列各式的分解因式：

① $100p^2-25q^2=(10p+5q)(10p-5q)$　　② $-4m^2-n^2=-(2m+n)(2m-n)$

③ $x^2-6=(x+3)(x-2)$　　④ $-x^2-x+\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

其中正确的个数有(　　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题：

1. $m(m-n)^2-(n-m)^2$=(__________)(__________)

2. $15x^2+7xy-4y^2$=(__________)(__________)

3. $(a+b)^3-(a+b)$=(__________)(__________)(__________)

三、分解因式：

（1）$x^2-2x-15$

（2）$x^2-(a+b)xy+aby^2$

（3）$-2x^2+5x+3$

第三讲　方程

知识点回顾

1.一元二次方程根的判别式

一般地，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，它的根是：$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数解。由此可知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的情况可以由 b^2-4ac 来判定，所以，我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程，$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用符号“Δ”来表示。

综上所述，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，

①当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$；

③当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根。

2.一元二次方程根与系数的关系

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，则有：

$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})=\frac{c}{a}$，

所以，一元二次方程的根与系数之间存在下列关系：

当 $\Delta\geq 0$ 时，如果 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根分别是 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，此关系又称为韦达定理。所以，以 x_1,x_2 为根的方程可以表示为：$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

由根与系数的关系可以得到一些两根简单组合与系数的关系，比如一元二次方程的

两根之差的绝对值就是一个重要的量：$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}=\dfrac{\quad}{|a|}$

课前练习

1.下列方程中，有两个实根的是（　　）

A．$x^2+4=0$　　　　B．$4x^2-4x+1=0$

C．$x^2+x+3=0$　　　　D．$x^2+2x-1=0$

2.解方程：（1）$x^2-3x-10=0$　　　　（2）$2x^2+4x-3=0$

3.若方程方程$2x^2+5x-1=0$的两根分别为x_1和x_2，求$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$，$x_1{}^2+x_2{}^2$，$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$，$|x_1-x_2|$的值。

典型例题

例 1 已知方程$5x^2+kx-6=0$的一个根是 2，求它的另一个根及k的值。

分析：由于已知方程的一个根，可以直接将这一根代入求出 k 的值，再由方程解出另一个根。但由于我们学习了韦达定理，可以用韦达定理来解题，即由于已知方程的一个根及方程的二次项系数和常数项，于是可以利用两根之积求出方程的另一个跟，再由根之和求出 k 的值。

解：方法 1：因为 2 是方程的一个根，所以 $5\times2^2+k\times2-6=0$，所以 $k=-7$。

所以方程为 $5x^2-7x-6=0$，解得 $x_1=2, x_2=-\dfrac{3}{5}$

所以方程的另一个根是 $-\dfrac{3}{5}$，且 $k=-7$。

方法 2：设方程的另一个根是 x_1，则 $2x_1=-\dfrac{6}{5}$，所以 $x_1=-\dfrac{3}{5}$

由 $(-\dfrac{3}{5})+2=-\dfrac{k}{5}$ 得 $k=-7$

例 2　已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根，并且这两个实数根的平方和比两个根的积大 21，求 m 的值．

分析：本题可以利用韦达定理，由实数根的平方和比两个根的积大 21 得到关于 m 的方程，从而解得 m 的值．但在解题中需要特别注意的是，由于所给的方程有两个实数根，因此，其根的判别式应大于零．

解：设 x_1，x_2 是方程的两根，由韦达定理，得

$x_1+x_2=-2(m-2)$，$x_1\cdot x_2=m^2+4$．

$\because x_1^2+x_2^2-x_1\cdot x_2=21$，

$\therefore (x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2=21$，

即　$[-2(m-2)]^2-3(m^2+4)=21$，

化简，得　$m^2-16m-17=0$，

解得　$m=-1$，或 $m=17$．

当 $m=-1$ 时，方程为 $x^2+6x+5=0$，$\Delta>0$，满足题意；

当 $m=17$ 时，方程为 $x^2+30x+293=0$，$\Delta=30^2-4\times1\times293<0$，不合题意，舍去．

综上，$m=17$．

例 3 已知两个数的和为 4，积为 -12，求这两个数．

分析：我们可以设出这两个数分别为 x，y，利用二元方程求解出这两个数．也可以利用韦达定理转化出一元二次方程来求解．

解法一：设这两个数分别是 x，y，

则　$x+y=4$，　①

$xy=-12$．　②

由①，得　$y=4-x$，　代入②，得

$x(4-x)=-12$，

即　$x^2-4x-12=0$，$\therefore x_1=-2$，$x_2=6$．

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 6, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

因此，这两个数是－2 和 6．

解法二：由韦达定理可知，这两个数是方程 $x^2-4x-12=0$ 的两个根．

解这个方程，得　$x_1=-2$，$x_2=6$．

所以，这两个数是－2 和 6．

说明：从上面的两种解法我们不难发现，解法二（直接利用韦达定理来解题）要比解法一简捷．

随堂练习

1.已知一个关于 x 的方程 $x^2+kx-2=0$ 的一个根是 1，则它的另一个根是____________.

2.以－3 和 1 为根的一元二次方程是______________________________.

3.若 x_1, x_2 是方程 $x^2+kx-2=0$ 的两根，且 $|x_1-x_2|=3$，求 k。

4．求一个一元二次方程，使它的两根分别是方程 $x^2-7x-1=0$ 两根的相反数．

课后练习

1. 关于 x 的一元二次方程 $\left(a-1\right)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根是 0，则 a 值为（　　　）

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. $\frac{1}{2}$

2. 若关于 x 的方程 $x^2+(k^2-1)x+k+1=0$ 的两根互为相反数，则 k 的值为（　　　）

A.1 或－1　　B.1　　C.－1　　D.0

3.如果方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不等的实根，则实数 a 的取值范围是（　　　）

A．a<1　　B．a<1 且 a≠0　　C．a≤1　　D．a≤1 且 a≠0

4. 已知两数的积是 13, 这两数的和是 11, 以这两数为根的一个一元二次方程是________.

5.已知方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根为 x_1 和 x_2，则 $(x_1-3)(x_2-3)$ 的值是__________.

6. 已知不为 0 的实数 a, b 分别满足 $a^2+2a-2=0$，$b^2+2b-2=0$；则 $a^2+b^2=$______________，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$__________。

7.已知关于 x 的方程 $x^2-kx-2=0$.

（1）求证：方程有两个不相等的实数根；

（2）设方程的两根为 x_1 和 x_2，如果 $2(x_1+x_2)>x_1x_2$，求实数 k 的取值范围.

8．关于 x 的方程 $x^2+4x+m=0$ 的两根为 x_1，x_2 满足 $|x_1-x_2|=2$，求实数 m 的值.

第四讲　二次函数
第 1 课时　图象及表示法

知识点回顾

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 具有下列性质

（1）当 a＞0，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上；顶点坐标 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而减少；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

（2）当 a＜0，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下；顶点坐标 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而减少；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

2. 二次函数三种表示形式

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

（2）顶点式：$y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$，其中顶点坐标是 (h,k)

（3）交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中 x_1，x_2 是二次图象与 x 轴的交点的横坐标

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴的交点个数与根的判别式△= b^2-4ac 的关系

（1）当△＞0 时，抛物线与 x 轴有两个交点；反过来，若抛物线与 x 轴有两个交点，则△＞0 也成立

（2）当△=0 时，抛物线与 x 轴只有一个交点（即抛物线的顶点）；反过来，若抛物线与 x 轴只有一个交点，则△=0 也成立

（3）当△＜0 时，抛物线与 x 轴没有交点；反过来，若抛物线与 x 轴没有交点，则△＜0 也成立

课前练习

1. 函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ 的顶点坐标是（　　）

A.（1，2）　　B.（1，—2）　　C.（—1，2）　　D.（—1，—2）

2. 函数 $y=x^2+x-1$ 的图象与 x 轴的交点个数是（　　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 无法确定

3. 函数 $y=x^2+4x+6$ 的最值情况是（　　　）

A. 有最小值 2　　B. 有最大值—2　　C. 有最大值 6　　D. 有最小值—6

4. 函数 $y=2x^2+2$ 的图象是将函数 $y=2x^2$ 的图象（　　　）

A. 向上平移 2 个单位长度得到的　　B. 向下平移 2 个单位长度得到的

C. 向左平移 2 个单位长度得到的　　D. 向右平移 2 个单位长度得到的

5. 已知函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过两点（1, 1），（—1，1），则函数的表达式是_____

典型例题

例 1 求 $y=x^2+2x+3$ 的对称轴，顶点坐标，并画出图象。

解：将函数右边配方得：$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

所以对称轴为直线 $x=-1$，顶点坐标 $(-1,2)$，

图象先画对称轴，再确定顶点位置，开口向上，再用描点法找出几个特殊点 $(-2,3)(0,3),(1,6),(-3,6)$，最后用圆滑的曲线画出函数图象的草图。图象略。

例 2 （1）函数 $y=x^2$ 的图象经过怎样的平移得到函数 $y=x^2+4x-5$ 的图象？

（2）函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图象经过怎样的平移得到函数 $y=-x^2$ 的图象？

分析：二次函数图象的平移可以用顶点的平移来衡量。

解：（1）函数 $y=x^2$ 图象的顶点坐标为 $(0,0)$，$y=x^2+4x-5$ 右边配方得到 $y=x^2+4x-5=(x+2)^2-9$，所以函数图象的顶点是 $(-2,-9)$，所以原图像先向左平移 2 个单位，再向下平移 9 个单位即可得到所求函数的图象。

（2）$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，所以原函数图象的顶点是 $(1,4)$，函数 $y=-x^2$ 的图象顶点是 $(0,0)$，所以原函数先向左平移一个单位，再向下平移 4 个单位即可得到所求函数的图象。

例 3 根据下列条件，求二次函数的解析式

（1）图象经过点（1，-2），（0，-3），（-1，-6）；

（2）当 x=3 时，函数有最小值 5，且经过点（1,11）；

（3）函数图象与 x 轴交于两点$(1-\sqrt{2},0)$和$(1+\sqrt{2},0)$，并与 y 轴交于点（0，-2）.

解：（1）设函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则有 $\begin{cases}-2=a+b+c\\-3=0+0+c\\-6=a-b+c\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=-3\end{cases}$

故函数解析式是 $y=-x^2+2x-3$.

（2）设函数 $y=a(x-3)^2+5(a\neq 0)$，则$11=a(1-3)^2+5$，得 $a=\dfrac{3}{2}$

故函数解析式是 $y=\dfrac{3}{2}(x-3)^2+5$.

（3）设函数 $y=a(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})(a\neq 0)$，则 $-2=a(0-1+\sqrt{2})(0-1-\sqrt{2})$，得 a=2，故函数解析式是 $y=2(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$.

例 4 已知函数 $y=x^2-3mx+\dfrac{3}{2}m+2$.

（1）若它的图像与 x 轴只有一个交点，求 m 的值。

（2）若它的图像与 x 轴两个交点坐标分别是$(x_1,0)$，$(x_2,0)$，且 x_1，x_2 互为负倒数，求 x_1+x_2 的值。

解：（1）$\Delta=9m^2-6m-8=0$，得 $m=-\dfrac{2}{3}$或$m=\dfrac{4}{3}$

（2）$x_1=-\dfrac{1}{x_2}$，则 $x_1x_2=\dfrac{3}{2}m+2=-1$，得 m=—2　故 $y=x^2+6x-1$，

$x_1+x_2=-6$

随堂练习

1. 函数 $y=x^2$ 的图象向左平移一个单位，再向下平移一个单位，得到的图象用函数表示为__________

2. 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像向左平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，得到的图象的函数解析式为 $y=x^2-2x+1$，则 b 与 c 的值分别为________和______。

3. 抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是 3，且过 $(0,-2)$ 和 $(2,0)$，求二次函数解析式。

4. 已知抛物线 $y=(m-1)x^2+2mx+m-1$，问 m 为何值时，抛物线与 x 轴没有交点？

课后练习

1. 若二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的顶点坐标为（a，b)，则 ab 的值为（　　　）

A．3　　　B．2　　　C．1　　　D．-2

2. 抛物线 $y=x^2-4$ 与 x 轴交于 B，C 两点，顶点为 A，则 ΔABC 的面积是（　　　）

A. 16　　　B. 8　　　C. 4　　　D. 2

3. 已知二次函数的图像与y轴交点坐标为$(0,a)$，与x轴两个交点坐标分别是$(b,0)$和$(-b,0)$，若a大于0，则函数解析式为（　　　　）

A. $y=\frac{a}{b^2}x^2+a$　　B. $y=-\frac{a}{b^2}x^2+a$　　C. $y=-\frac{a}{b^2}x^2-a$　　D. $y=\frac{a}{b^2}x^2-a$

4. 当m=______________时，函数$y=x^2+4mx+1$的最小值为—3。

5. 函数$y=\frac{1}{2}x^2+2x-2$的图象向_________平移_________个单位，再向________平移______个单位，可以得到函数$y=\frac{1}{2}x^2$的图象。

6. 抛物线的对称轴是$x=3$，与y轴交点的纵坐标是$-\frac{5}{2}$，且过点$(1,-6)$，求二次函数解析式。

7. 当a为何实数时，关于x的方程$x^2+(a-2)x+a-3=0$的两个实数根m，n的平方和取得最小值？最小值是多少？

第 2 课时　一元二次不等式图解法

课前练习

1.画出函数 $y=x^2-x-6$ 的图象，并根据图象求出满足下列条件的 x 的取值：

（1）$y=0$；

（2）$y>0$；

（3）$y<0$。

新知讲解

画出函数 $y=-x^2+2x+3$ 图象，指出其图象与 x 轴的交点坐标 ，并求出当 $y\le 0$ 时，x 的范围。

典型例题

例 1 解不等式：

（1）$x^2+2x-3\le 0$；　　（2）$x-x^2+6<0$；

（3）$4x^2+4x+1\ge 0$；　　（4）$x^2-6x+9\le 0$；

（5）$-4+x-x^2<0$.

解：（1）因为Δ=16＞0，方程 $x^2+2x-3=0$ 的解是 $x_1=-3$，$x_2=1$.

由图象知：不等式的解为

$$-3\le x\le 1.$$

（2）整理，得 $x^2-x-6>0$.

因为Δ=25＞0，方程 $x^2-x-6=0$ 的解为

$$x_1=-2，x_2=3.$$

由图象知：原不等式的解为

$$x<-2\text{或}x>3.$$

（3）整理，得 $(2x+1)^2\ge 0$.

由于上式对任意实数 x 都成立，

由图象知：原不等式的解为一切实数.

（4）整理，得 $(x-3)^2\le 0$.

由于当 $x=3$ 时，$(x-3)^2=0$ 成立；而对任意的实数 x，$(x-3)^2<0$ 都不成立，

由图象知：原不等式的解为

$$x=3.$$

（5）整理，得

$$x^2-x+4>0.$$

因为$\Delta=-15<0$，所以，由图象知：原不等式的解为一切实数.

例 2 若 $0<a<1$，求不等式 $(x-a)(x-\frac{1}{a})<0$ 的解。

分析：比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小，写出答案

解：因为 $0<a<1$ 所以 $a<\frac{1}{a}$，解应当在两根之间，得 $a<x<\frac{1}{a}$ 。

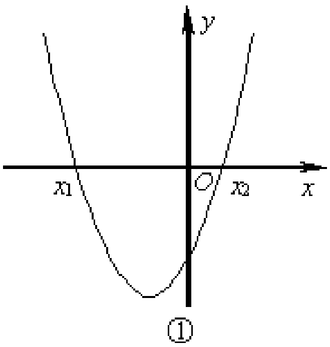
例 3 若 $ax^2+bx-1<0$ 的解为 $-1<x<2$，则 a=________，b=________.

分析 根据一元二次不等式的解公式可知，－1 和 2 是方程 $ax^2+bx-1=0$ 的两个根，考虑韦达定理.

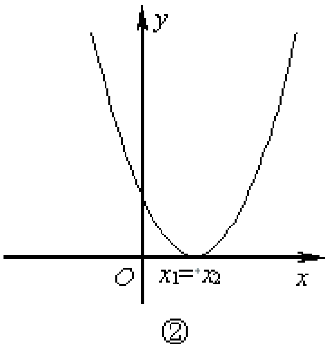
解 根据题意，－1，2 应为方程 $ax^2+bx-1=0$ 的两根，则由韦达定理知

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}=(-1)+2=1 \\ -\frac{1}{a}=(-1)\times 2=-2 \end{cases} \text{得}\quad a=\frac{1}{2}，\ b=-\frac{1}{2}.$$

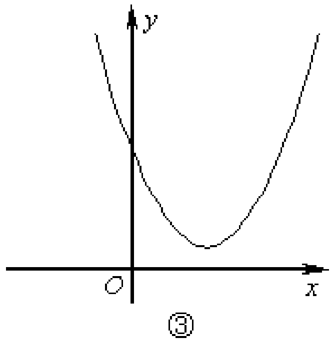
小结：一元二次不等式的解法，我们可以分下列三种情况讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）与 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解.



①



②



③

（1）当$\Delta>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）与 x 轴有两个公共点$(x_1，0)$和$(x_2，0)$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$，由上图①可知

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为

$x<x_1$，或 $x>x_2$；

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解为

$x_1<x<x_2$.

（2）当Δ＝0 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）与 x 轴有且仅有一个公共点，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$，由上图②可知

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为

$x\neq-\dfrac{b}{2a}$；

（3）当Δ<0 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）与 x 轴没有公共点，方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，由上图③可知

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为全体实数。

随堂练习

1. 解不等式

（1）$x^2+x+1>0$　　　(2) $2x^2+3x+4<0$

（3）$2x^2-3x-2>0$；　　　（4）$4x^2-4x+1>0$；

2.不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解是 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$，则 a+b=______.

3.求不等式 $x^2-x-a^2+a<0$ 的解

课后练习

1．设一元二次不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的解为 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，则 ab 的值是（　　）

A. -6　　B. -5　　C. 6　　D. 5

2．不等式 $(x+2)(1-x)>0$ 的解是（　　）

A. $\{x|x>1或x<-2\}$　　B. $\{x>2或x<-1\}$

C. $\{x|-2<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<2\}$

3．不等式 $ax^2+5x+c>0$ 的解为 $\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$ 则 a，c 的值为(　　)

A．$a=6$，$c=1$　　B．$a=-6$，$c=-1$

C．$a=1$，$c=1$　　D．$a=-1$，$c=-6$

4．若二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in R)$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

5.关于 x 的方程 $x^2+ax+a^2-1=0$ 有一正根和一负根，则 a 的取值范围是＿＿＿＿＿＿.

6．不等式 $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant 0$ 的解为＿＿＿＿＿＿＿＿.

7．求下列不等式的解：

(1) $2x^2+7x+3>0$;　　(2) $-x^2+8x-3>0$;

(3) $x^2-4x-5\leqslant 0$;　　(4) $-\frac{1}{2}x^2+3x-5>0$;

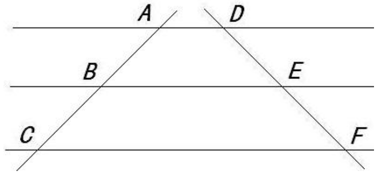
第五讲 平面几何知识选讲

知识点回顾

1. 平行线分线段成比例定理：

三条平行线截两条直线，所得对应线段成比例。

如图，



$\because AD \parallel BE \parallel CF$

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}, \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}, \dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}.$

（注意：其特殊情况为相似三角形对应边的比、三角形的中位线，梯形中位线的性质）

2. 三角形的“四心”和射影定理

（1）三角形的重心是三角形三条中线的交点。

（2）三角形的外心是三角形三条垂直平分线的交点(或三角形外接圆的圆心)。

（3）三角形的内心是三角形三条内角平分线的交点(或内切圆的圆心)。

（4）三角形的垂心是三角形三边上的高的交点(通常用 H 表示)。

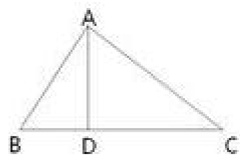
（5）所谓射影，就是正投影。

直角三角形射影定理：直角三角形中，斜边上的高的平方是两直角边在斜边上射影的比例中项。每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项。

公式：如图，在 Rt△ABC 中，∠BAC=90°，AD 是斜边 BC 上高，则有射影定理如下：

$(1)AD^2=BD\ DC \quad (2)AB^2=BD\ BC$

$(3)AC^2=CD\ BC \quad (4)AB\ AC=BC\ AD$



3. 圆的相关定理

（1）垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧。

（2）相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等。

（3）切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。

（4）弦切角定理：弦切角的度数等于它所夹的弧的圆心角的度数的一半.

课前练习

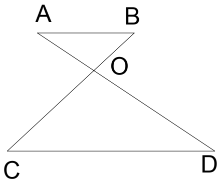
1. 已知如图，AB∥CD，AD 与 BC 相交于点 O，则下列比例式中正确的是（　　）

A. $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{OA}{AD}$　　B. $\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OB}{BC}$　　C. $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{OB}{OC}$　　D. $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{OB}{OD}$

2. 如图，在△ABC 中，AD＝DF＝FB，AE＝EG＝GC，FG＝4，则（　　）

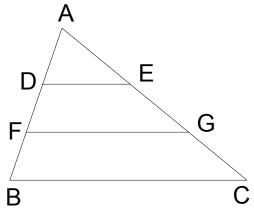
A．DE＝1，BC＝7　　　　B．DE＝2，BC＝6

C．DE＝3，BC＝5　　　　D．DE＝2，BC＝8



选择第 1 题图

第 1 题图



选择第 2 题图

第 2 题图

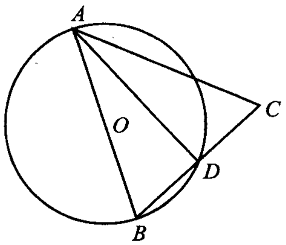
3. 若△*ABC* 的面积为 *S*，且三边长分别为 *a*、*b*、*c*，则三角形的内切圆的半径是 ____________；

4. 如图，*AB* 是⊙*O* 的直径，*C*，*D* 是半圆的三等分点，则∠*C*＋∠*E*＋∠*D*＝(　　　)

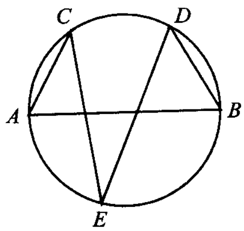
A．135°　　B．110°　　C．145°　　D．120°

5. 如图，以等腰三角形的腰为直径作圆，交底边于 *D*，连结 *AD*，那么 (　　　)

A．∠*BAD*＋∠*CAD*＝90°　B．∠*BAD*＞∠*CAD*　C.∠*BAD*＝∠*CAD*　D．∠*BAD*＜∠*CAD*



第 4 题图



第 5 题图

典型例题

例 1： 如图，在△ABC 中，P 为中线 AM 上任一点，CP 的延长线交 AB 于 D，BP 的延长线交 AC 于 E，连结 DE。

（1）求证：DE∥BC；

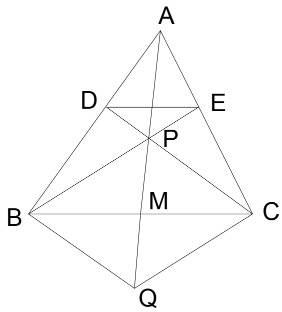
（2）如图，在△ABC 中，DE∥BC，DC、BE 交于 P，连结 AP 并延长交 BC 于 M，试问：M 是否为 BC 的中点？

解析：（1）延长 AM 至 Q，使 MQ＝MP

∵BM＝MC，∴四边形 BPCQ 是平行四边形

∴CD∥BQ，BE∥QC

$$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AP}{PQ}=\frac{AE}{EC}$$ ∴DE∥BC



例 3 图

（2）过 B 作 BQ∥CD 交 AM 的延长线于 Q

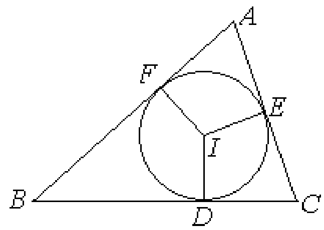
∵DE∥BC，∴ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{AE}{EC}$

∴ $\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{AE}{EC}$， ∴BE∥QC

∴四边形 BPCQ 是平行四边形　　∴M 是 BC 的中点

例 2：如图， 已知$\triangle ABC$的三边长分别为$BC=a, AC=b, AB=c$，I 为$\triangle ABC$的内心，且 I 在$\triangle ABC$的边BC、AC、AB上的射影分别为D、E、F，求证：$AE=AF=\dfrac{b+c-a}{2}$.

证明： 作$\triangle ABC$的内切圆，则D、E、F分别为内切圆在三边上的切点，



$\because AE, AF$为圆的从同一点作的两条切线，

$\therefore AE=AF$，

同理，$BD=BF$，$CD=CE$.

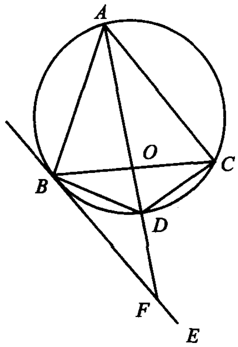
$\therefore b+c-a=AF+BF+AE+CE-BD-CD$

$=AF+AE=2AF=2AE$

即 $AE=AF=\dfrac{b+c-a}{2}$.

例 3： $\triangle ABC$内接于圆O，$\angle BAC$的平分线交⊙O于D点，交⊙O的切线BE于F，连结BD，CD． 求证：(1)BD平分$\angle CBE$；(2)$AB\cdot BF=AF\cdot DC$.

【分析】可根据同弧所对的圆周角及弦切角的关系推出．由条件及(1)的结论，可知$BD=CD$，因此欲求$AB\cdot BF=AF\cdot DC$，可求$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{BD}{BF}$，因此只须求$\triangle ABF\backsim\triangle BDF$即可．



证明：(1)∵$\angle CAD=\angle BAD=\angle FBD$，$\angle CAD=\angle CBD$，

∴$\angle CBD=\angle FBD$，∴BD平分$\angle CBE$.

(2)在$\triangle DBF$与$\triangle BAF$中，

∵$\angle FBD=\angle FAB$，$\angle F=\angle F$，∴$\triangle ABF\backsim\triangle BDF$，，

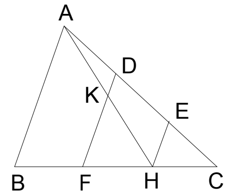
$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{BD}{BF}$ 　∴$AB\cdot BF=BD\cdot AF$.

又∵$BD=CD$，

∴$AB\cdot BF=CD\cdot AF$.

随堂练习

1. 已知如图，AD＝DE＝EC，且 AB∥DF∥EH，AH 交 DF 于 K，求$\dfrac{DK}{KF}$的值。



解答第 1 题图

2. 若直角三角形的三边长分别为 a、b、c（其中 c 为斜边长），则三角形的内切圆的半径是____________.

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，$AB=2$，$DB=1$，则 $DC=$______，$AD=$______.

课后练习

一、选择题：

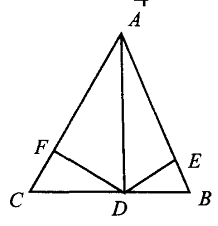
1. 三角形三边长分别是 6、8、10，那么它最短边上的高为（　）

A．6　　B．4.5　　C．2.4　　D．8

2. 在△ABC 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，$CD\perp AB$ 于 D，$AB=a$，则 $DB=$（　　）

A．$\dfrac{a}{4}$　　B．$\dfrac{a}{3}$　　C．$\dfrac{a}{2}$　　D．$\dfrac{3a}{4}$

3．如图，AD 是△ABC 高线，$DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，则(1)$AD^2=BD\cdot CD$(2)$AD^2=AE\cdot AB$



(3)$AD^2=AF\cdot AC$(4)$AD^2=AC^2-AC\cdot CF$中正确的有(　　)

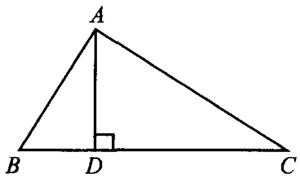
A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

选择第 3 题图

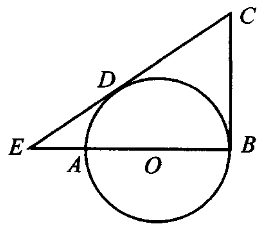
二、填空题：

1. 在 Rt△ABC 中，AD 为斜边上的高，$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle ABD}$，则 AB∶BC=______.

2. 如图，AB 是⊙O 的直径，CB 切⊙O 与 B，CD 切⊙O 与 D，交 BA 的延长线于 E. 若 AB=3，ED=2，则 BC 的长为______.



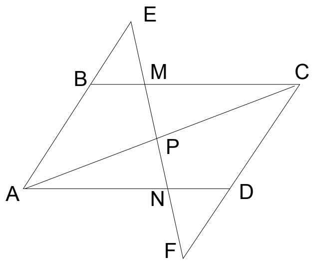
填空第 1 题图



填空第 2 题图

三、解答题：

如图，▱ABCD 中，EF 交 AB 的延长线于 E，交 BC 于 M，交 AC 于 P，交 AD 于 N，交 CD 的延长线于 F。求证：$PE\cdot PM=PF\cdot PN$。



解答第 2 题图

解答图

总复习题

1.化简：$|x-5|-|2x-13|$　（$x>5$）

2.已知 $a+b+c=4$，$ab+bc+ac=4$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的因式分解。

3.把下列各式分解因式：

（1）$x^2+5x-6=$________________________________。

（2）$x^2-5x+6=$________________________________。

（3）$x^2+5x+6=$________________________________。

（4）$x^2-5x-6=$________________________________。

（5）$x^2-(a+1)x+a=$________________________________。

（6）$x^2-11x+18=$________________________________。

（7）$6x^2+7x+2=$________________________________。

（8）$4m^2-12m+9=$________________________________。

（9）$5+7x-6x^2=$________________________________。

（10）$12x^2+xy-6y^2=$________________________________。

4.选择题:

若关于 x 的方程 $x^2+(k^2-1)x+k+1=0$ 的两根互为相反数，则 k 的值为（　　　）

A.1 或-1　　　　B.1　　　　C.-1　　　　D.0

5.填空:

（1）若 m，n 是方程 $x^2+2005x-1=0$ 的两个实数根，则 m^2n+mn^2-mn 的值等于____。

（2）如果 a，b 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个实数根，那么代数式 $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ 的值是____________.

6.已知关于 x 的方程 $x^2-kx-2=0$.

（1）求证：方程有两个不相等的实数根；

（2）设方程的两根为 x_1 和 x_2，如果 $2(x_1+x_2)>x_1x_2$，求实数 k 的取值范围.

7.已知 x_1，x_2 是关于 x 的一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根.

（1）是否存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$ 成立？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由；

（2）求使 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的实数 k 的整数值；

（3）若 $k=-2$，$\lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$，试求 λ 的值.

8.已知函数 $y=-x^2-2x+3$，当自变量 x 在下列取值范围内时，分别求函数的最大值或最小值，并求当函数取最大（小）值时所对应的自变量 x 的值：（1）$x\le -2$；（2）$x\le 2$；（3）$-2\le x\le 1$；（4）$0\le x\le 3$。

9.根据下列条件，求二次函数的解析式。
（1）图象经过点（1，-2)，(0，-3)，(-1，-6)；
（2）当 $x=3$ 时，函数有最小值 5，且经过点（1,11)；
（3）函数图象与 x 轴交于两点（$1-\sqrt{2}$，0）和（$1+\sqrt{2}$,0)，并与 y 轴交于（0,-2)。

10.求证：若三角形的垂心和重心重合，求证：该三角形为正三角形.

11.（1） 若三角形 ABC 的面积为 S，且三边长分别为 a、b、c，则三角形的内切圆的半径是____________；

（2）若直角三角形的三边长分别为 a、b、c（其中 c 为斜边长），则三角形的内切圆的半径是____________. 并请说明理由.

12.如图 1，在△ABC 中，AD 是角 BAC 的平分线，AB=5cm，AC=4cm，BC=7cm，求 BD 的长。

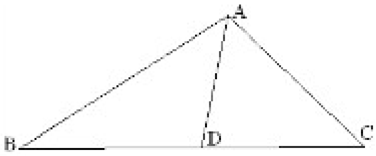


图 1

13.如图 2，在△ABC 中，∠BAC的外角平分线AD交BC的延长线于点D，求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

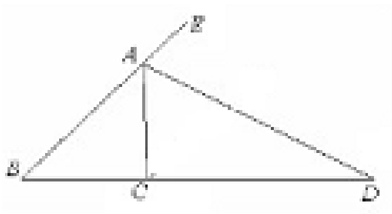


图 2

14. 如图 3，已知在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，AC=5cm，BC=12cm，以 C 为圆心，CA 为半径的圆交斜边于 D，求 AD。

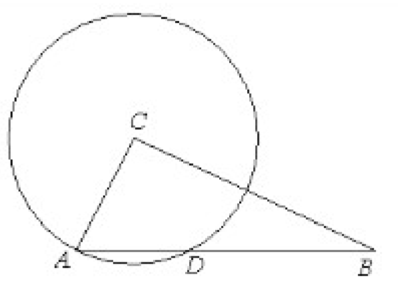


图 3

15. 如图 4，在⊙O 中，E 是弦 AB 延长线上的一点，已知 OB=10cm，OE=12cm，∠OEB=30°，求 AB。

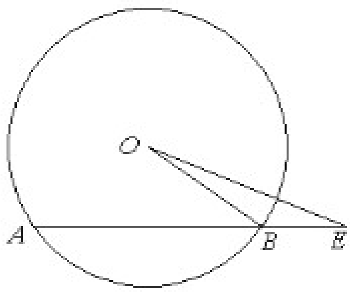


图 4

答案

第一讲 代数式及其运算
第 1 课时

课前练习

1、± 5； -1或3

2、-1

3、b+3c-a

4、D

5、 0

6、 1

随堂练习

1、B

2、

$x \geq \frac{3}{5}$或$x \leq -\frac{3}{5}$

3、B

课后练习

1． ± 4；

2． D

3．6 或 8

4．（1） $\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b$ （2） $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ （3） $4ab-2ac-4bc$

5． A

6． 9

第 2 课时

课前练习

1、3

2、A

3、C

随堂练习

1、A

2、 A

3、<

课后练习

1． （1） $\sqrt{3}-2$ （2） $3 \leq x \leq 5$ （3） $-8\sqrt{6}$

2．（1）C （2）B

3．＞

4．1

5. 原式=$\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}=\left|x-\frac{1}{x}\right|$，$\because 0<x<1$，$\therefore \frac{1}{x}>1>x$， 所以，原式=$\frac{1}{x}-x$.

6. $\frac{99}{100}$

第二讲 因式分解

课前练习

1．$2n(x-y)$

2. $(2x-3y)^2$

3.（$x-2$）（$x-4$）

4. $(a+1)(a^2-a+1)$

5. $(a+1)(x-1)$

随堂练习

1. $(2x-1)(x-2))$

2. $(x+2a-1)(x+1)$

3. $(x-1)(x^2+x-8)$

课后练习

1. （1）D（2）B（3）B

2. （1） $(m-n)^2(m-1)$ （2）$(3x-y)(5x+4y)$

（3）$(a+b)(a+b+1)(a+b-1)$

3.（1）$(x-5)(x+3)$ （2）$(x-ay)(x-by)$ （3）$-(2x+1)(x-3)$

第三讲 方程

课前练习

1.D；

2.（1）因式分解法，$x_1=5,x_2=-2$；（2）求根公式法，$x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$，$x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}$

3.（1）5；（2）$\frac{29}{4}$；（3）$-\frac{29}{2}$；（4）$\frac{\sqrt{33}}{2}$

随堂练习

1.$\underline{-2}$；

2.$x^2+2x-3=0$

3.±1　解析：$9=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=k^2+8$

4．$y^2+7y-1=0$　设已知方程的两根分别是 x_1 和 x_2，则所求的方程的两根分别是$-x_1$和$-x_2$，∵$x_1+x_2=7$，$x_1x_2=-1$，∴$(-x_1)+(-x_2)=-7$，$(-x_1)\times(-x_2)=x_1x_2=-1$，∴所求的方程为 $y^2+7y-1=0$.

课后练习

1.B；

2.C　解析：由于 $k=1$ 时，方程为 $x^2+2=0$，没有实数根，所以 $k=-1$.

3.B；

4.$\underline{x^2-11x+13=0}$；

5．-1　解析：$(x_1-3)(x_2-3)=x_1x_2-3(x_1+x_2)+9$

6.8,1　解析:a,b 是方程 $x^2+2x-2=0$ 的两根。

7．解：（1）∵$\Delta=(-k)^2-4\times1\times(-2)=k^2+8>0$，∴方程一定有两个不相等的实数根.
（2）∵$x_1+x_2=k$，$x_1x_2=-2$，∴$2k>-2$，即 $k>-1$.

8．解：∵$|x_1-x_2|=\sqrt{16-4m}=2\sqrt{4-m}=2$，∴$m=3$．把 $m=3$ 代入方程，$\Delta>0$，满足题意，∴$m=3$

第四讲　二次函数

第 1 课时　图象及表示法

课前练习

1、C
2、C
3、A
4、A
5、$y=x^2$

随堂练习

1、$y=(x+1)^2-1$

2、解：由 $y=(x+2)^2+b(x+2)+c+3=x^2+(4+b)x+(7+2b+c)$

得 $\begin{cases}4+b=-2\\7+2b+c=1\end{cases}$，则 $\begin{cases}b=-6\\c=6\end{cases}$

2、解：抛物线与 x 轴的一个交点是（2,0），则另一个交点是（—1,0）或（5,0）

则设 $y=a(x-2)(x+1)$或$y=a(x-2)(x-5)$，将点（0，—2）代入

得 $a=1$或$a=-\dfrac{1}{5}$

故函数解析式是 $y=(x-2)(x+1)$ 或 $y=-\dfrac{1}{5}(x-2)(x-5)$

3、解：由 $m-1\neq 0$ 且 $\Delta=(2m)^2-4(m-1)(m-1)=8m-4<0$

故 m＜$\dfrac{1}{2}$

课后练习

1、B

2、B

3、B

4、 $m=\pm 1$

5、右，2，上，4

6、

解：设 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=3\\c=-\dfrac{5}{2}\\a+b+c=-6\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\dfrac{7}{10}\\b=-\dfrac{21}{5}\\c=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$，故

$y=\dfrac{7}{10}x^2-\dfrac{21}{5}x-\dfrac{5}{2}$

7、解：$\Delta=(a-2)^2-4\times 1\times(a-3)=(a-4)^2\geqslant 0$

$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=[-(a-2)]^2-2(a-3)=a^2-6a+10=(a-3)^2+1$

故当 a=3 是，所求最小值是 1

第 2 课时　一元二次不等式图解法

课前练习

1. 二次函数 $y=x^2-x-6$ 的对应值表与图象如下：

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	6	0	−4	−6	−6	−4	0	6

由对应值表及函数图象(如右图)可知
当 x＝−2，或 x＝3 时，y＝0，即 $x^2-x=6=0$；
当 x＜−2，或 x＞3 时，y＞0，即 $x^2-x-6>0$；
当−2＜x＜3 时，y＜0，即 $x^2-x-6<0$.

2．(-1, 0), (3, 0), $x\geq 3$或$x\leq -1$

随堂练习

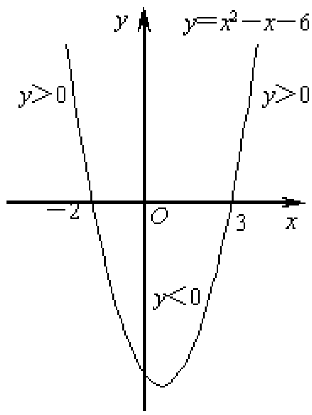
1. (1)R　(2) ϕ　(3) $\{x \mid x<2或x>-\frac{1}{2}\}$　(4) $\{x \mid x\neq\frac{1}{2}\}$

2. -14

3. 解：∵方程 $x^2-x-a^2+a=0$ 的两个根为 a 和 1−a，

∴当 a≥1−a，即 a≥ $\frac{1}{2}$ 时，不等式的解为 x＜1−a，或 x＞a；

当 a＜1−a，即 a＜ $\frac{1}{2}$ 时，不等式的解为 x＜a 或 x＞1−a。



课后练习

1．C　　解析：设 $f(x)=ax^2+bx+1$，则 $f(-1)=f(\frac{1}{3})=0$ ∴a=-3,b=-2∴ab=6。

2．A

3．C　　解析：所给不等式即 $(x+2)(x-1)<0$ ∴−2＜x＜1

4．B

5．$x<-2或x>3$　　解析：两个根为 2，−3，由函数值变化可知 a>0∴$ax^2+bx+c>0$ 的解是 $x<-2或x>3$。

6．-1<a<1　　解析：令 $f(x)=x^2+ax+a^2-1$,由题意得 f(0)<0 即 $a^2-1<0$，∴-1<a<1。

7. $x\geq3$ 或 $x=2$ 或 $x=-1$　　解析：等价于 $x-2=0$ 或 $x^2-2x-3=0$ 或 $\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-2x-3\geq0 \end{cases}$，

可得 $x\geq3$ 或 $x=2$ 或 $x=-1$。

8. (1)因为$\Delta=7^2-4\times2\times3=25>0$，

所以方程 $2x^2+7x+3=0$ 有两个不等实根 $x_1=-3$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

又二次函数 $y=2x^2+7x+3$ 的图象开口向上，

所以原不等式的解 $\{x|\ x>-\frac{1}{2}$ 或 $x<-3\}$

(2)因为$\Delta=8^2-4\times(-1)\times(-3)=52>0$，

所以方程 $-x^2+8x-3=0$ 有两个不等实根

$x_1=4-\sqrt{13}$，$x_2=4+\sqrt{13}$.

又二次函数 $y=-x^2+8x-3$ 的图象开口向下，

所以原不等式的解为 $4-\sqrt{13}<x<4+\sqrt{13}$.

(3)原不等式可化为$(x-5)(x+1)\leq0$，

所以原不等式的解为$-1\leq x\leq5$.

(4)原不等式可化为 $x^2-6x+10<0$，

因为$\Delta=6^2-40=-4<0$，方程 $x^2-6x+10=0$ 无实数根，

所以原不等式的无实数解.

第五讲　平面几何知识选讲

课前练习

1. C
2. B
3. $\dfrac{2S}{a+b+c}$
4. D
5. C

随堂练习

1. $\frac{1}{3}$　　　　提示：利用平行线分线段成比例定理。

2. $\dfrac{a+b-c}{2}$

3. 3和$\sqrt{3}$

课后练习

一、选择题：

1. D
2. A
3. C

二、填空题：

1. 1:2　　提示：利用射影定理。
2. 3　　提示：利用切割线定理。

三、解答题：

证明$\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PN}{PM}$即可。

总复习题

1. $3x-18$

2. $\because (a+b+c)^2=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

而$a+b+c=4, ab+bc+ac=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=4^2-2\times 4=8$

3.(1)$(x-1)(x+6)$

(2)$(x-2)(x-3)$

(3)$(x+2)(x+3)$

(4)$(x+1)(x-6)$

(5)$(x-1)(x-a)$

(6)$(x-2)(x-9)$

(7)$(2x+1)(3x+2)$

(8)$(2m-3)^2$

(9)$-(2x+1)(3x-5)$

(10)$(3x-2y)(4x+3y)$

4. C

5. (1)2006　提示：

$\because m+n=-2005, mn=-1, \therefore m^2n+mn^2-mn=mn(m+n-1)=-1\times(-2005-1)=2006$

（2）-3　提示：

$$\because a+b=-1, ab=-1, \therefore a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)$$
$$=(a+b)\left[(a+b)^2-2ab\right]=(-1)\times\left[(-1)^2-2\times(-1)\right]=-3$$

6.

(1) $\because \Delta=(-k)^2-4\times1\times(-2)=k^2+8>0$, $\therefore$所以方程一定有两个不相等的实数根

(2) $\because x_1+x_2=k, x_1x_2=-2, \therefore 2k>-2$, 即$k>-1$

7.

(1)假设存在实数k, 使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$成立

$\because$一元一次方程$4kx^2-4kx+k+1=0$有两个实数根，

$\therefore k\neq0$, 且$\Delta=16k^2-16k(k+1)=-16k\geq0, \therefore k<0$

$\because x_1+x_2=1, x_1x_2=\dfrac{k+1}{4k}$

$\therefore (2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2x_1{}^2-5x_1x_2+2x_2{}^2$

$=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2=2-\dfrac{9(k+1)}{4k}=-\dfrac{3}{2}$

即$\dfrac{9(k+1)}{4k}=\dfrac{7}{2}$，解得$k=\dfrac{9}{5}$, 与$k<0$相矛盾，

所以，不存在实数k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$成立.

(2) $\because \dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2=\dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1x_2}-2=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}-2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-4$

$=\dfrac{4k}{k+1}-4=\dfrac{4k-4(k+1)}{k+1}=-\dfrac{4}{k+1}$

$\because k<0$

$\therefore$要使$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2$的值为整数的实数$k$的整数值为$-2,-3$和$-5$.

(3) 当$k=-2$时，$x_1+x_2=1$，① $x_1x_2=\frac{1}{8}$②

①^2 ÷②，得$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=8$，即$\lambda+\frac{1}{\lambda}=6, \therefore \lambda^2-6\lambda+1=0$

$\therefore \lambda=3\pm2\sqrt{2}$

8.$\because y=-(x+1)^2+4$

$\therefore$该函数图象开口向下，对称轴为$x=-1$，顶点坐标为$(-1,4)$

$\therefore$ (1)当$x\le-2$时，$y_{\min}=3$，此时$x=-2$;

(2)当$x\le 2$时，$y_{\max}=4$,此时$x=-1$;

(3)当$-2\le x\le 3$时，$y_{\max}=4$,此时$x=-1$,$y_{\min}=-12$,此时$x=3$;

(4)当$0\le x\le 3$时，$y_{\max}=3$,此时$x=1$,$y_{\min}=-12$,此时$x=3$.

9.(1)设该二次函数为$y=ax^2+bx+c(a\ne0)$.

由题得$\begin{cases}-2=a+b+c\\-3=c\\-6=a-b+c\end{cases}$

解得$a=-1,b=2,c=-3$

$\therefore$所求二次函数为$y=-x^2+2x-3$.

(2)设该二次函数为$y=a(x-3)^2+5(a>0)$,而图象过$(1,11)$,则$11=4a+5$,解得$a=\frac{3}{2}$

$\therefore$所求二次函数为$y=\frac{3}{2}(x-3)^2+5$.

(3)设该二次函数为$y=a(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$,而在$y$轴交于点$(0,-2)$,

则$-a=-2$,解得$a=2$ $\therefore$所求二次函数为$y=2(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$.

10. 略。

11. (1)$\frac{2S}{a+b+c}$;(2)$\frac{a+b-c}{2}$

12. $\because \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{5}{4}, \therefore BD=\frac{35}{9}cm$

13.

作$CF // AB$交AD于F，则$\frac{AB}{CF}=\frac{BD}{DC}$,又$\angle AFC=\angle FAE=\angle FAC$得$AC=CF$,$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

14. 作 $CM \perp AD$于M，$AB = 13\text{cm}$，$CM = \dfrac{60}{13}$，$AD = \dfrac{10}{13}\sqrt{133}\text{cm}$

15. $\text{AB} = 8\text{cm}$.